117. 有界多葉函数の性質について

京都工専　吉田德之助（8.10）

多葉函数についてその性質を導き出すのと同じやうな方法ですれば有界多葉函数の性質が少しく出せることを述べたい、こゝでは

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots\cdots+a_n z^n+\cdots\cdots$$

なる形の単位円内 $|z|<1$ で正則，p 葉且つ有界：$|f(z)|<M^p$ な函数について考へる。先ず

$$\sqrt[p]{f(z)}=z+b_2 z^2+\cdots\cdots+b_n z^n+\cdots\cdots$$

は $|z|<1(M)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{M^2}}}}$ で正則且つ單葉であることを証明する。

$$w(z)=\frac{1}{\sqrt[p]{f(\frac{1}{z})}}=z+c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots\cdots$$

とするとき $w(z)$ は $1<|z|<\infty$ で正則で $|w(z)|>\frac{1}{M}$. また $(w(z))^p$ は $|z|>1$ で p 葉となる。$r>1$ とする。R を十分大にすれば $w=w(z)$ による円 $|z|=R$ の像は單一閉曲線となり円 $|z|=r$ の像をその内部に含むに至る。円 $|z|=R$ の像にて囲まれた範囲の面積を $A(R)$ とし、円環 $r<|z|<R$ の函

数 $W=W(Z)$ による像の Riemann 面上での面積を $A(r, R)$ とすれば、談話 1160（第260号）と同様に

$$A(r\,R)+\pi\left(\frac{1}{M}\right)^2 \leqq A(R)$$

が成立することが言へて、これを級数の関係式になほしてから $r\to 1$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|C_n|^2 \leqq 1-\frac{1}{M^2}$$

を得る。$|Z|>\frac{1}{r(M)}$ なるときは $\frac{1}{(|Z|^2-1)^2}<\frac{1}{1-\frac{1}{M^2}}$ 従つて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|Z|^{2n+2}}<\frac{1}{1-\frac{1}{M}}$$

となる。こゝに得た二つの関係式から Schwarz の不等式によつて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|C_n|}{|Z|^{n+1}}<1$$

を得る。この式から再び前述の談話と同様にして $W(Z)$ が $|Z|>\frac{1}{r(M)}$ で単葉であることがわかる。従つて $\sqrt[p]{f(Z)}$ は $|Z|<r(M)$ で正則且つ単葉となる。

函数 $r(M)$ は $M=\infty$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$M=1$ のときは 1 となるからこの意味に於けるMの函数として $r(M)$ は $M=1$ のとき限度に達してゐると言へるのであるが、これが限度を示す函数であるとは言へない。次に

$$|a_{p+1}|\leqq 2p\sqrt{1-\frac{1}{M}}$$

であることを證明する。

$$W(Z)=\frac{1}{\sqrt[2p]{f\left(\frac{1}{Z^2}\right)}}=Z+\frac{d_1}{Z}+\cdots\cdots$$

とすれば $d_1=-\frac{a_{p+1}}{2p}$、$|W(Z)|>\frac{1}{\sqrt{M}}$ となる。前と同じ方法によつて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|d_n|^2 \leqq 1-\frac{1}{M}$$

が證せられる。従つて $|d_1|^2\leqq 1-\frac{1}{M}$、故に $|a_{p+1}|\leqq 2p\sqrt{1-\frac{1}{M}}$ を得る。

等号が成立する場合は $|d_1|=\sqrt{1-\frac{1}{M}}$, $d_2=0$, $d_3=0$, ... となる。従つて $W(Z)=Z+\frac{d_1}{Z}$. $M\neq 1$ とすれば $d_1\neq 0$ となつて $d_1=|d_1|e^{i\alpha}$ と書ける。更に $M\neq\infty$ とすれば

$$|f(-e^{-i\alpha})|=\frac{1}{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{M}}\right)^{2p}}=\left(2M^2-M+2M^2\sqrt{1-\frac{1}{M}}\right)^p$$
$$=\left\{M+2M^2\left(1-\frac{1}{M}+\sqrt{1-\frac{1}{M}}\right)\right\}^p>M^p$$

となつて設定：$|f(z)|<M^p$ に反するから，$M\neq 1$ とすれば $M=\infty$ である。
$M=1$ なるときは $\alpha_1=0$ となり $w(z)=z$ 従つて $f(z)=z^p$ となる。
$M=\infty$ なるときは $|\alpha_1|=1$ となつて $w(z)=z+\frac{e^{i\alpha}}{z}$ 従つて
$f(z)=\dfrac{z^p}{(1+e^{i\alpha}z)^{2p}}$ となる。このいずれの函数についてもあきらかに等号が成立する。従つて等号が成立するのは $f(z)=z^p$ か $f(z)=\dfrac{z^p}{(1+e^{i\alpha}z)^{2p}}$ かのいずれかの場合に限る。